

XÁC ĐỊNH HỆ SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHUẨN TRONG BÌNH SAI ĐIỀU KIỆN CẠNH, DIỆN TÍCH KHI HIỆU CHỈNH THỪA ĐẤT

ĐINH HẢI NAM, PHẠM THẾ HUYNH, TRẦN THÙY DƯƠNG
Trường Đại học Mỏ - Địa chất

Tóm tắt: Trong bài toán cập nhật biến động đất đai, một trong những biện pháp xử lý hiệu quả là sử dụng phương pháp bình sai điều kiện cạnh, diện tích. Bài báo trình bày phương pháp xác định trực tiếp các hệ số hệ phương trình chuẩn khi hiệu chỉnh thửa đất, với điều kiện cạnh, diện tích của một số thửa đất không đổi. Phương pháp này thể hiện rõ cấu trúc ma trận hệ phương trình chuẩn, là một trong những biện pháp làm giảm đáng kể thời gian tính toán, giảm dung lượng lưu trữ và giảm sai số làm tròn.

1. Mở đầu

Đối với bài toán cập nhật biến động đất đai, vấn đề giữ nguyên giá trị cạnh, diện tích thửa đất trong một số trường hợp cụ thể như độ rộng mặt tiền thửa đất đã được đo chính xác bằng thước thép hay kích thước, diện tích đã được coi là chính xác... là hết sức cần thiết. Để giải quyết vấn đề này, tọa độ các đỉnh thửa liên quan cần được hiệu chỉnh sao cho không làm thay đổi giá trị cạnh, diện tích thửa đất. Từ đó, đặt ra bài toán bình sai với điều kiện cạnh, diện tích không thay đổi. Ở bài toán này, số loại phương trình điều kiện chỉ có hai loại là điều kiện cạnh và điều kiện diện tích, chúng dễ dàng được biểu diễn bằng hàm toán học của các ẩn số nên thuận tiện cho việc lập phương trình điều kiện các số hiệu chỉnh. Do đó, lựa chọn phương pháp bình sai điều kiện trong trường hợp này là hoàn toàn hợp lý.

Tuy nhiên, do các thửa đất có mối quan hệ liên hệ với nhau nên khi hiệu chỉnh tọa độ các đỉnh thửa dẫn đến kích thước, diện tích các thửa liên hệ thay đổi. Để giữ nguyên các giá trị cạnh và diện tích của các thửa đất này cần sử dụng phương pháp bình sai cho tới khi tọa độ tất cả các đỉnh thửa chỉ bị hiệu chỉnh một giá trị rất nhỏ, có thể bỏ qua.

Với phương pháp giải quyết này, số ẩn số và số phương trình điều kiện tăng nhanh chóng dẫn tới khối lượng lưu trữ và tính toán lớn. Như vậy, cần có giải pháp để lưu trữ, tính toán nhằm tăng tốc độ xử lý khi lập trình ứng dụng. Bài báo này trình bày phương pháp xác định trực tiếp các hệ

số hệ phương trình chuẩn nhằm hiểu rõ cấu trúc ma trận hệ số hệ phương trình chuẩn từ đó giảm khối lượng lưu trữ, tăng tốc độ tính toán và giảm sai số làm tròn.

2. Giải quyết vấn đề

2.1. Mô hình toán học bình sai điều kiện

Coi tọa độ là các trị đo theo [1],[4] hệ phương trình điều kiện số hiệu chỉnh tọa độ được viết dưới dạng:

$$BV + W = 0 \quad (1)$$

Để giải hệ phương trình (1) với điều kiện $[pvv] = \min$, thì hệ phương trình chuẩn có dạng:

$$N_{rxr} K_{rx1} + W_{rx1} = 0 \quad (2)$$

trong đó: $N = BP^{-1}B^T$ (3)

$K^T = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ là vector các số liên hệ; $P_{n \times n}$ là ma trận trọng số

Giải (2) ta được: $K = -N^{-1}W$ từ đó xác định được $V = P^{-1}B^TK$ (4)

2.2. Lập phương trình điều kiện

2.2.1. Phương trình điều kiện cạnh

Cạnh D_{ij} giữa 2 điểm i, j tính theo công thức:

$$D_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

$$\text{hay } D_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (5)$$

Vi phân (5) và chuyển về dạng tuyến tính thu được:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i}\right) v_{xi} + \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial y_i}\right) v_{yi} + \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j}\right) v_{xj} + \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial y_j}\right) v_{yj} + W_{Dij} &= 0 \\ -\frac{\Delta x_{ij}}{D_{ij}} v_{xi} - \frac{\Delta y_{ij}}{D_{ij}} v_{yi} + \frac{\Delta x_{ij}}{D_{ij}} v_{xj} + \frac{\Delta y_{ij}}{D_{ij}} v_{yj} + W_{Dij} &= 0 \\ -\cos\alpha_{ij} v_{xi} - \sin\alpha_{ij} v_{yi} + \cos\alpha_{ij} v_{xj} + \sin\alpha_{ij} v_{yj} + W_{Dij} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

trong đó:

$W_{Dij} = D_{ij} - D_0$ là độ lệch giữa độ dài cạnh D_{ij} được tính từ tọa độ với giá trị cạnh được coi là chính xác D_0

α_{ij} : Góc phương vị cạnh ij ; $\Delta x_{ij} = x_j - x_i$;

$\Delta y_{ij} = y_j - y_i$

2.2.2. Phương trình điều kiện diện tích

Từ công thức tính diện tích thửa đất j [2]

$$P_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i (x_{i-1} - x_{i+1}), \quad (7)$$

với n là số đỉnh thửa

Vì phân từng phần (7) theo x_i và y_i

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (y_{i+1} - y_{i-1}) = \frac{1}{2} \Delta y_{i-1, i+1}; \quad \frac{\partial P_j}{\partial y_i} = \frac{1}{2} (x_{i-1} - x_{i+1}) = -\frac{1}{2} \Delta x_{i-1, i+1} \quad (8)$$

Hệ phương trình điều kiện diện tích như sau:

$$\left(\frac{\partial P_j}{\partial x_1} \right) v_{x1} + \left(\frac{\partial P_j}{\partial y_1} \right) v_{y1} + \left(\frac{\partial P_j}{\partial x_2} \right) v_{x2} + \left(\frac{\partial P_j}{\partial y_2} \right) v_{y2} + \dots + \left(\frac{\partial P_j}{\partial x_n} \right) v_{xn} + \left(\frac{\partial P_j}{\partial y_n} \right) v_{yn} + W_j = 0 \quad (9)$$

Nhân hai vế (9) với 2 và thay (8) vào ta có:

$$\Delta y_{n2} v_{x1} - \Delta x_{n2} v_{y1} + \Delta y_{13} v_{x2} - \Delta x_{13} v_{y2} + \dots + \Delta y_{n-1,1} v_{xn} - \Delta x_{n-1,1} v_{yn} + 2.W_j = 0 \quad (10)$$

2.3. Xác định ma trận hệ số phương trình chuẩn của các số liên hệ

Với hệ số phương trình điều kiện số hiệu chỉnh cạnh, diện tích đã phân tích trong mục 2.2, thấy rằng có rất nhiều hệ số bằng 0. Với giả thiết các tọa độ đỉnh thửa có cùng độ chính xác ($p_{xi} = p_{yi} = 1$), căn cứ vào đặc điểm các hệ số phương trình điều kiện số hiệu chỉnh sẽ xác định được các thành phần của ma trận N mà không cần thực hiện phép nhân hai ma trận B và B^T . Ma trận N có đặc điểm là ma trận đối xứng nên $N_{ij} = N_{ji}$, để xác định các thành phần N_{ij} của ma trận N lấy tổng các tích hệ số tương ứng với số hiệu chỉnh của phương trình điều kiện thứ i và phương trình điều kiện thứ j .

2.3.1. Khi các điều kiện đưa vào bình sai chỉ là các cạnh

Theo (6) ta lập phương trình điều kiện i, j, k cho cạnh mn, np, pq (hình 1) như sau:

V	v_{xm}	v_{ym}	v_{xn}	v_{yn}	v_{xp}	v_{yp}	v_{xq}	v_{yq}	W
B	i	$-\cos\alpha_{mn}$	$-\sin\alpha_{mn}$	$\cos\alpha_{mn}$	$\sin\alpha_{mn}$	0	0	0	W_{Dmn}
	j	0	0	$-\cos\alpha_{np}$	$-\sin\alpha_{np}$	$\cos\alpha_{np}$	$\sin\alpha_{np}$	0	W_{Dnp}
	k	0	0	0	0	$-\cos\alpha_{pq}$	$-\sin\alpha_{pq}$	$\cos\alpha_{pq}$	W_{Dpq}

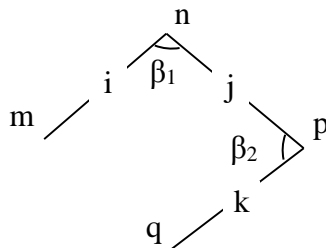
- Các thành phần của ma trận N được xác định như sau:

$$N_{ii} = \cos^2\alpha_{mn} + \sin^2\alpha_{mn} + \cos^2\alpha_{mn} + \sin^2\alpha_{mn} = 2 \quad (11)$$

$$N_{ij} = -\cos\alpha_{mn} \cos\alpha_{np} - \sin\alpha_{mn} \sin\alpha_{np} \\ = -\cos(\alpha_{mn} - \alpha_{np}) = \cos\beta_1 \quad (12)$$

tương tự $N_{jk} = N_{kj} = \cos\beta_2$

$N_{ik} = N_{ki} = 0$ do cạnh i và cạnh k không có điểm chung



Hình 1. Điều kiện cạnh i, j, k

Như vậy cách xác định các thành phần ma trận N như sau:

- Các thành phần trên đường chéo chính của ma trận N đều bằng 2
- Thành phần N_{ij} của hai cạnh thứ i, thứ j không chung đỉnh thì bằng 0
- Thành phần N_{ij} của hai cạnh thứ i, thứ j có chung đỉnh thì bằng $\cos\beta$, với β là góc kẹp giữa hai cạnh

2.3.2. Khi các điều kiện đưa vào bình sai chỉ là diện tích các thửa đất

Mỗi thửa đất đưa vào bình sai sẽ lập được một phương trình điều kiện như (10). Sau đây, xem xét các trường hợp cụ thể, từ đó tổng quát hóa phương pháp xác định các thành phần của ma trận N.

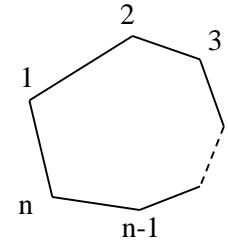
a) Trường hợp một thửa đất - Hình 2

V_{x1}	V_{y1}	V_{x2}	V_{y2}	V_{xn}	V_{yn}
Δy_{n2}	$-\Delta x_{n2}$	Δy_{13}	$-\Delta x_{13}$	$\Delta y_{n-1,1}$	$-\Delta x_{n-1,1}$

$$N_{11} = D_{n2}^2 + D_{13}^2 + \dots + D_{n-1,1}^2 = \sum_{i=1}^n D_{i-1,i+1}^2 \quad (13)$$

với $D_{i-1,i+1}^2$ là bình phương khoảng cách giữa hai điểm là đỉnh trước và đỉnh sau của đỉnh i.

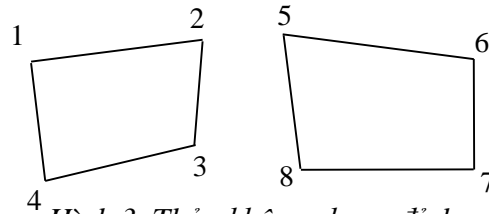
$$\text{hay } N_{11} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{i-1, i+1} \cdot \overrightarrow{i-1, i+1}$$



Hình 2. Trường hợp một thửa

b) Trường hợp hai thửa đất không chung đỉnh - Hình 3

V_{x1}	V_{y1}	V_{x2}	V_{y2}	V_{x3}	V_{y3}	V_{x4}	V_{y4}	V_{x5}	V_{y5}	V_{x6}	V_{y6}	V_{x7}	V_{y7}	V_{x8}	V_{y8}
Δy_{42}	$-\Delta x_{42}$	Δy_{13}	$-\Delta x_{13}$	Δy_{24}	$-\Delta x_{24}$	Δy_{31}	$-\Delta x_{31}$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	Δy_{86}	$-\Delta x_{86}$	Δy_{57}	$-\Delta x_{57}$	Δy_{68}	$-\Delta x_{68}$	Δy_{75}	$-\Delta x_{75}$



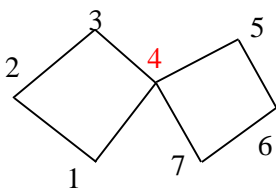
Hình 3. Thửa không chung đỉnh

$$N_{11} = D_{42}^2 + D_{13}^2 + D_{24}^2 + D_{31}^2 = \sum_{i=1}^n D_{i-1,i+1}^2$$

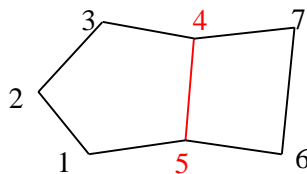
$$N_{22} = D_{86}^2 + D_{57}^2 + D_{68}^2 + D_{75}^2 = \sum_{i=1}^m D_{i-1,i+1}^2 \quad (14)$$

$N_{12} = N_{21} = 0$, với n là số đỉnh của thửa thứ nhất, m là số đỉnh của thửa thứ hai.

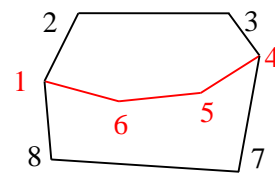
c) Hai thửa đất có chung nhau đỉnh



Hình 4. Hai thửa chung đỉnh



Hình 5. Hai thửa chung cạnh



Hình 6. Hai thửa chung nhiều cạnh

+ Hai thửa đất chung nhau một đỉnh - Hình 4: Điểm chung là điểm 4

v_{x1}	v_{y1}	v_{x2}	v_{y2}	v_{x3}	v_{y3}	v_{x4}	v_{y4}	v_{x5}	v_{y5}	v_{x6}	v_{y6}	v_{x7}	v_{y7}
Δy_{42}	$-\Delta x_{42}$	Δy_{13}	$-\Delta x_{13}$	Δy_{24}	$-\Delta x_{24}$	Δy_{31}	$-\Delta x_{31}$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	Δy_{75}	$-\Delta x_{75}$	Δy_{46}	$-\Delta x_{46}$	Δy_{57}	$-\Delta x_{57}$	Δy_{64}	$-\Delta x_{64}$

$$N_{11} = D_{42}^2 + D_{13}^2 + D_{24}^2 + D_{31}^2 ; N_{22} = D_{75}^2 + D_{46}^2 + D_{57}^2 + D_{64}^2$$

$$N_{12} = N_{21} = \Delta y_{31} \Delta y_{75} + \Delta x_{31} \Delta x_{75} = \overline{31.75}$$

+ Hai thửa đất chung nhau một cạnh - Hình 5: Cạnh chung là cạnh 45

v_{x1}	v_{y1}	v_{x2}	v_{y2}	v_{x3}	v_{y3}	v_{x4}	v_{y4}	v_{x5}	v_{y5}	v_{x6}	v_{y6}	v_{x7}	v_{y7}
Δy_{52}	$-\Delta x_{52}$	Δy_{13}	$-\Delta x_{13}$	Δy_{24}	$-\Delta x_{24}$	Δy_{35}	$-\Delta x_{35}$	Δy_{41}	$-\Delta x_{41}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	Δy_{57}	$-\Delta x_{57}$	Δy_{64}	$-\Delta x_{64}$	Δy_{75}	$-\Delta x_{75}$	Δy_{46}	$-\Delta x_{46}$

$$N_{11} = D_{52}^2 + D_{13}^2 + D_{24}^2 + D_{35}^2 + D_{41}^2 ; N_{22} = D_{57}^2 + D_{64}^2 + D_{75}^2 + D_{46}^2$$

$$N_{12} = N_{21} = \Delta y_{35} \Delta y_{57} + \Delta x_{35} \Delta x_{57} + \Delta y_{41} \Delta y_{64} + \Delta x_{41} \Delta x_{64} = \overline{35.57} + \overline{64.41}$$

+ Hai thửa đất chung nhau nhiều cạnh - Hình 6: Tuyến cạnh chung 4561

v_{x1}	v_{y1}	v_{x2}	v_{y2}	v_{x3}	v_{y3}	v_{x4}	v_{y4}	v_{x5}	v_{y5}	v_{x6}	v_{y6}	v_{x7}	v_{y7}	v_{x8}	v_{y8}
Δy_{62}	$-\Delta x_{62}$	Δy_{13}	$-\Delta x_{13}$	Δy_{24}	$-\Delta x_{24}$	Δy_{35}	$-\Delta x_{35}$	Δy_{46}	$-\Delta x_{46}$	Δy_{51}	$-\Delta x_{51}$	0	0	0	0
Δy_{86}	$-\Delta x_{86}$	0	0	0	0	Δy_{57}	$-\Delta x_{57}$	Δy_{64}	$-\Delta x_{64}$	Δy_{15}	$-\Delta x_{15}$	Δy_{48}	$-\Delta x_{48}$	Δy_{71}	$-\Delta x_{71}$

$$N_{11} = D_{62}^2 + D_{13}^2 + D_{24}^2 + D_{35}^2 + D_{46}^2 + D_{51}^2 ; N_{22} = D_{86}^2 + D_{57}^2 + D_{64}^2 + D_{15}^2 + D_{48}^2 + D_{71}^2$$

$$N_{12} = N_{21} = \Delta y_{62} \Delta y_{86} + \Delta x_{62} \Delta x_{86} + \Delta y_{35} \Delta y_{57} + \Delta x_{35} \Delta x_{57} + \Delta y_{46} \Delta y_{64} + \Delta x_{46} \Delta x_{64} + \Delta y_{51} \Delta y_{15} + \Delta x_{51} \Delta x_{15} = \overline{86.62} + \overline{35.57} + \overline{64.46} + \overline{51.15}$$

Tổng quát hóa:

Dựa trên các phân tích trong các trường hợp cụ thể ở trên, có thể tổng quát hóa phương pháp xác định trực tiếp hệ số của ma trận N như sau:

- Khi chỉ hiệu chỉnh một thửa thì ma trận N chỉ có một phần tử, tính theo (13).

- Khi đưa hai thửa đất i, j không có chung đỉnh nào thì các thành phần ma trận N xác định theo (14).

- Khi đưa nhiều thửa đất vào bình sai, cần xem xét mối tương quan giữa các thửa đất với nhau để xác định các thành phần của ma trận N. Khi hai thửa đất i và j có chung nhau k điểm thì tại mỗi đỉnh chung có số hiệu c (hình 7):

$$N_{ij} = \sum_k \overline{mn} \cdot \overline{pq} \quad (15)$$

m là số hiệu đỉnh trước của c tính theo thửa i

n là số hiệu đỉnh sau của c tính theo thửa i

p là số hiệu đỉnh trước của c tính theo thửa j

q là số hiệu đỉnh sau của c tính theo thửa j

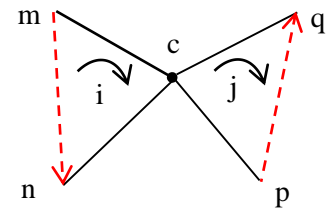
Công thức (15) tổng quát chung cho cả công thức (13) và (14), các thành phần đường chéo chính N_{ii} và N_{jj} có thể sử dụng công thức (13) để tăng tốc độ tính toán.

2.3.3. Khi các điều kiện đưa vào bình sai có cả cạnh và diện tích các thửa đất

Trong trường hợp này, các thành phần ma trận N đối với trường hợp cạnh u với cạnh v và diện tích thửa đất i với diện tích thửa đất j xác định như trong mục 2.3.1 và 2.3.2. Cần xác định các thành phần của N đối với trường hợp cạnh u với thửa i. Lúc này xảy ra các trường hợp:

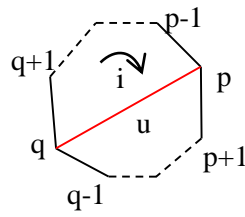
a. Cạnh u không có điểm trùng với thửa i

Thành phần của ma trận N ngoài đường chéo chính bằng 0

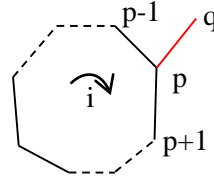


Hình 7. Xác định hệ số tại một đỉnh thửa

b. Cạnh u nối hai đỉnh có số hiệu p và q là hai điểm thuộc thửa i (n đỉnh) - hình 8



Hình 8. Cạnh u có hai đỉnh thuộc thửa i



Hình 9. Cạnh u có đỉnh p thuộc thửa i

	v_{x1}	v_{y1}	...	v_{xp}	v_{yp}	...	v_{xq}	v_{yq}	...	v_{xn}	v_{yn}
Thửa i	Δy_{n2}	$-\Delta x_{n2}$...	$\Delta y_{p-1,p+1}$	$-\Delta x_{p-1,p+1}$...	$\Delta y_{q-1,q+1}$	$-\Delta x_{q-1,q+1}$...	$\Delta y_{n-1,1}$	$-\Delta x_{n-1,1}$
Cạnh u	0	0	0	$-\cos\alpha_{pq}$	$-\sin\alpha_{pq}$	0	$\cos\alpha_{pq}$	$\sin\alpha_{pq}$	0	0	0

Thành phần của ma trận N ngoài đường chéo chính tương ứng được tính bằng:

$$N_{iu} = -\Delta y_{p-1,p+1} \cos\alpha_{pq} + \Delta x_{p-1,p+1} \sin\alpha_{pq} + \Delta y_{q-1,q+1} \cos\alpha_{pq} - \Delta x_{q-1,q+1} \sin\alpha_{pq}$$

$$N_{iu} = \frac{-\Delta y_{p-1,p+1} \Delta x_{pq} + \Delta x_{p-1,p+1} \Delta y_{pq} + \Delta y_{q-1,q+1} \Delta x_{pq} - \Delta x_{q-1,q+1} \Delta y_{pq}}{D_{pq}}$$

$$N_{iu} = \frac{\overrightarrow{p-1,p+1} \wedge \overrightarrow{pq}}{D_{pq}} + \frac{\overrightarrow{q-1,q+1} \wedge \overrightarrow{pq}}{D_{pq}} \quad (16)$$

c. Cạnh u (pq) trong đó p thuộc thửa i (n đỉnh), q không thuộc thửa i - hình 9

	v_{x1}	v_{y1}	...	v_{xp}	v_{yp}	...	v_{xn}	v_{yn}	v_{xq}	v_{yq}
Thửa i	Δy_{n2}	$-\Delta x_{n2}$...	$\Delta y_{p-1,p+1}$	$-\Delta x_{p-1,p+1}$...	$\Delta y_{n-1,1}$	$-\Delta x_{n-1,1}$	0	0
Cạnh u	0	0	0	$-\cos\alpha_{pq}$	$-\sin\alpha_{pq}$	0	0	0	$\cos\alpha_{pq}$	$\sin\alpha_{pq}$

Thành phần của ma trận N ngoài đường chéo chính tương ứng được tính bằng:

$$N_{iu} = -\Delta y_{p-1,p+1} \cos\alpha_{pq} + \Delta x_{p-1,p+1} \sin\alpha_{pq} = \frac{\overrightarrow{p-1,p+1} \wedge \overrightarrow{pq}}{D_{pq}} \quad (17)$$

3. Kết luận

Các công thức đã xây dựng mang tính tổng quát, dễ nhớ, chỉ cần xét đến mối quan hệ của đỉnh thửa đang xét với các đỉnh thửa liền kề.

Trong một số trường hợp chỉ có một hoặc hai phương trình điều kiện thì có thể tính toán và hiệu chỉnh thửa đất ngay mà không cần phần mềm xử lý.

Việc xác định trực tiếp các hệ số của hệ phương trình chuẩn cho phép lưu trữ hệ số hệ phương trình điều kiện số hiệu chỉnh dưới dạng các vectơ, cho phép giảm đáng kể số lượng phép nhân giữa hai véc tơ của ma trận B, giúp tiết kiệm bộ nhớ máy tính, tăng tốc độ tính toán và giảm sai số làm tròn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Hoàng Ngọc Hà, Trương Quang Hiếu, 1999. Cơ sở toán học xử lý số liệu trắc địa, Nhà xuất bản Giao thông vận tải, Hà Nội.
 - [2]. Nguyễn Trọng San, Đinh Công Hòa, 2000. Đề tài cấp Bộ mã số B2000-36-50 "Nghiên cứu phương pháp chính xác hoá số liệu về vị trí, kích thước và diện tích thửa đất phục vụ thành lập bản đồ địa chính và quản lý thông tin đất đai".
 - [3]. Trần Văn Minh, 2000. Phương pháp số - Thuật toán và chương trình bằng Turbo Pascal, Nhà xuất bản Giao thông vận tải, Hà Nội.
 - [4]. Большаков В. Д., Гайдаев П. А. 1977, Теория математической обработки геодезических измерений, Издательство Недр.
- (xem tiếp trang 99)

SUMMARY

Determination of normal equations for adjustment of land parcels with distance and area constraints

Dinh Hai Nam, Pham The Huynh, Tran Thuy Duong, *Hanoi University of Mining and Geology*

For land parcel changes updating, it is necessary to have an adjustment of land parcel with edges (distance) and area constraints. This paper presents a method to determine the normal equations for the adjustment directly with the edges and area constraints. This method shows the structure of the normal equation matrix and it will help to reduce the cost of computing, memory occupation of the program and computing errors.