Tạp chí Khoa học Kỹ thuật Mỏ - Địa chất

Trang điện tử: http://tapchi.humg.edu.vn

Một số vấn đề về sai số và nội suy

THÔNG TIN KHOA HỌC

Nguyễn Văn Ngọc *, Tô Văn Đinh

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Mỏ - Địa chất, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

Quá trình:
Nhận bài 18/12/2018
Chấp nhận 22/02/2019
Đăng online 28/02/2019

Từ khóa:
Sai số
Nội suy
Nội suy nhiều biến

TÓM TẮT

Mọi tính toán đều có sai số. Bài báo cung cấp cách nhìn tổng quan về sai số, trong đó sai số tính toán được đề cập như một điển hình. Các bài toán kỹ thuật địa chất, xây dựng, ... thường được đặt ra với bộ dữ liệu được khảo sát rời rạc. Nội suy là giải pháp nhân rộng kết quả khảo sát. Bài báo mở rộng nội suy hàm số một biến số cho hàm số hai biến số.

1. Mở đầu

Tiếp xúc trực tiếp với thầy/cô các khoa Xây dựng, Địa chất... trong trường, các học viên cao học nhiều ngành nghề; đọc các tài liệu trắc địa, địa chất, xây dựng (Võ Trọng Hùng, 1992, 1993), chúng tôi thấy một số vấn đề về tính toán được đặt ra. Bài này trình bày bài bản, ngắn gọn các vấn đề đó, hy vọng cung cấp cách nhìn tổng quan về một công cụ cơ bản cho các lĩnh vực kỹ thuật trong trường, đó là sai số và nội suy.

Về sai số, chúng tôi liệt kê tất cả các loại sai số nhằm phác thảo bức tranh toàn cảnh để trong những tình huống cụ thể nhà kỹ thuật đưa ra các giải pháp hữu hiệu hạn chế sai số, đặc biệt đối với loại sai số không thể đánh giá chính xác được.

Trong mục 2.2 phần 4, chúng tôi lấy một ví dụ cụ thể để trình bày sai số hệ thống hay sai số phương pháp với lưu ý đặc biệt là: có nhiều phương pháp giải cho cùng một bài toán. Mỗi phương pháp có thuật toán riêng với độ phức tạp và sai số của kết quả cuối cùng khác nhau. Việc lựa chọn phương pháp (quy trình) là công việc cực kỳ quan trọng. Trong thực tế ta vẫn thường thấy "đúng quy trình" nhưng vẫn không cho kết quả như ý, đó là quy trình quá phức tạp (không khả thi) hoặc sai số quá lớn (không đúng người đúng việc).

Vấn đề nội suy cho kết quả là hàm số một biến số là bài toán cơ bản của phương pháp tính, được trình bày trong mọi tài liệu về phương pháp tính. Tuy nhiên, nội suy với dữ liệu cho trước tại các điểm $M(x_i, y_i)$ và kết quả là hàm số hai biến số được đặt ra bởi các thầy/cô trong trường đã thôi thúc chúng tôi mạnh dạn mở rộng kết quả cho bài toán mới với hy vọng các thầy/cô áp dụng được vào công việc của mình và rất mong nhận được sự phản hồi từ thực tế để chúng tôi hoàn chỉnh các đánh giá lý thuyết về sai số. Trước mắt chúng tôi chỉ thuyết phục thông qua các ví dụ minh họa ở phần cuối cùng của bài này.

2. Sai số và sai số tính toán.

*Tác giả liên hệ
E - mail: nguyenvanngoc@humg. edu. vn

2.1. Phân loại sai số

Vấn đề sai số được đặt ra trong mọi lĩnh vực kinh tế, khoa học, kỹ thuật: kỹ thuật dầu khí, kỹ thuật địa chất, kỹ thuật xây dựng… Sai số khi đánh giá trữ lượng một mỏ dầu; khi đo tốc độ của một phương tiện; khi đánh giá kết quả một công việc, một bài thi. Sai số của giá trị một biểu thức khi các toán hạng tham gia biểu thức đó có sai số... Vậy với mỗi đại lượng, sai số được hiểu thế nào? Để trả lời câu hỏi này người ta phân chia ra các loại sai số khác nhau với các cách nghiên cứu rất khác nhau.

Một đại lượng cần nghiên cứu *U* được xấp xỉ bằng một hằng số a. Nếu *U* được hiểu là một biến ngẫu nhiên thì sai số |*U*-a| là biến ngẫu nhiên và sai số trong trường hợp này gọi là sai số ngẫu nhiên. Sai số ngẫu nhiên được nghiên cứu bằng lý thuyết xác suất và thống kê bởi các bài toán phương sai, ước lượng kỳ vọng …

Người ta có thể xem đại lượng *U* như là một biến số thực, khi đó |*U-a*| là biến số thực. Sai số trong trường hợp này gọi là sai số tính toán và được nghiên cứu trong giải tích hàm.

Một đại lượng cũng có thể được đánh giá bằng các phương pháp, bằng các hệ thống quy tắc khác nhau. Sai số phát sinh trong trường hợp này gọi là sai số phương pháp hay sai số hệ thống. Có nhiều cách đánh giá sai số hệ thống như làm các thực nghiệm, các kiểm định, dùng giải tích hàm, v.v…

Trở lại sai số tính toán. Đại lượng cần xác định *U* có sai số phụ thuộc vào các toán hạng tham gia quá trình tính *U*. Để nghiên cứu sai số trong trường hợp này, trước hết phải nghiên cứu sai số của các toán hạng riêng lẻ, chi tiết được trình bày sau đây.

2.2. Sai số tính toán

Để tiện theo dõi, ở đây nhắc lại vài khái niệm cơ bản (Tô Văn Đinh và nnk, 2016).

Xét đại lượng A (nói chung A không biết chính xác, ta xem nó như là biến số).

Ta nói số a (cho trước) là xấp xỉ của A với sai số (sai số tuyệt đối hay sai số tuyệt đối giới hạn) Δ_a nếu $a - \Delta_a \le A \le a - \Delta_a$

Tức là: $| a - A | \le \Delta_a$ (1)

Nói cách khác, số dương Δ_a được gọi là sai số tuyệt đối của *a* nếu: $| a - A | \le \Delta_a$

Khi đó ta viết: $A = a \pm \Delta_a$.

Đại lượng δ gọi là sai số tương đối của số *a:*

$$\delta = \frac{\Delta_a}{|a|} \qquad (2)$$

Sai số tương đối cho biết mức độ tin cậy của số xấp xỉ. Sai số tuyệt đối không phản ánh được điều đó. Giả sử đo chiều dài của hai cung đường, được kết quả S_1 = 1500m ± 50cm; S_2 = 10m ± 50cm.

Hai phép đo có cùng sai số tuyệt đối nhưng phép đo sau chính xác hơn phép đo trước.

Tuy nhiên, nếu biết sai số tuyệt đối thì suy ra sai số tương đối và ngược lại. Mở rộng (1) nếu $A = f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$; $a=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Trong đó $x_1, x_2,\ldots, x_n$ tương ứng là xấp xỉ của $X_1, X_2, \ldots, X_n$ với sai số tuyệt đối $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_n}$ thì:

$$|A-a| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_1,\ldots,c_n)\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_1,\ldots,c_n)\right| \Delta_{x_i} \qquad (3)$$

Trong đó c_i nằm giữa x_i và X_i với mọi *i*.

Khi đó:

$$\Delta_a = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_1,\ldots,c_n)\right| \Delta_{x_i} \qquad (4)$$

là sai số của *a*. Tương tự, sai số tương đối của *a* là $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$

Ví dụ 1

Cho u = x + y. Tìm Δ_u biết Δ_x, Δ_y

Giải: Theo (4), vì $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1$

nên $\Delta u = \Delta x + \Delta y$;

Vậy $\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y$ (5)

Ví dụ 2

Cho $u = x + y$. Tìm δ_u biết δ_x, δ_y.

Giải: Theo (3), ta có $\Delta_u = |y|\Delta_x + |x|\Delta_y$

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \frac{|y|\Delta_x + |x|\Delta_y}{|xy|} = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y$$

Vậy $\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y$ (6)

Chú ý

1) Tương tự ví dụ 2, ta có công thức (7)

$$\delta_{x/y} = \delta_x + \delta_y \qquad (7)$$

2) Từ công thức (5) ta suy ra công thức (8)

$$\delta_{x^n} = n\delta_x \qquad (8)$$

Ví dụ 3

Thể tích hình cầu đường kính *d* tính bởi

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3$$

Cho d=3,7±0,05 và π =3,14. Tính δ_v và Δ_V.

Giải: Theo công thức (5) và (8) ta có $\delta_v = \delta_\pi + \delta_{d^3} = \delta_\pi + 3\delta_d$

Mặt khác $\delta_\pi = \frac{0{,}0016}{3{,}14} = 0{,}0005$, $\delta_d = \frac{0{,}05}{3{,}7} = 0{,}0135$.

Vậy $\delta_V = 0{,}0005 + 3.0.0135 = 0{,}04$

$$\Delta_V = V.\delta_V = \frac{1}{6}.3{,}14.3{,}7^3.0{,}04 = 1{,}06$$

2.3. Sai số hệ thống và sai số tính toán

Nói chung sai số hệ thống hay sai số phương pháp được xác định thông qua sai số tính toán của phương pháp đó. Để sáng tỏ điều này ta xét chi tiết ví dụ sau:

Ví dụ 1

Tính $A = (\sqrt{2} - 1)^{10}$ bằng 2 phương pháp

Cách 1: Tính trực tiếp $A = (\sqrt{2} - 1)^{10}$

Cách 2: Áp dụng khai triển Newton ta được A=3363-2378$\sqrt{2}$

Bảng 1. Kết quả của A tính theo 2 cách.

$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2} - 1)^{10}$	3363-2378$\sqrt{2}$
1,4	0,0001048576	33,8
1.41	0,00013422659	10,02
1,41421	0,00014866399	0,00862
1,414213563	0,00014867678	0,0001472

Kết quả khác biệt đó xảy ra vì theo công thức (3), mỗi phương pháp có sai số tính toán khác nhau. Cụ thể theo công thức (3)

Sai số tính toán theo cách 1

$A=(x-1)^{10}$

Suy ra: $\Delta_a = 10.(x-1)^9\Delta_x$

Sai số tính toán theo cách 2

$A=3363-2378x$

Suy ra: $\Delta_a = 2378\Delta_x$

Ta nhận thấy rằng xấp xỉ x = 1,4 có sai số tuyệt đối Δ_x = 0,05. Tính sai số như trên dễ dàng lý giải sự khác biệt kết quả trong Bảng 1 (các dòng sau của Bảng 1 có sai số được tính tương tự).

Sự ổn định

Xét một quá trình tính vô hạn (tức là gồm vô số bước) để tính ra một đại lượng nào đó. Ta nói quá trình tính là ổn định nếu sai số tính toán tức là các sai số quy tròn tích lũy lại không tăng vô hạn.

Nếu sai số đó tăng vô hạn thì ta nói quá trình tính là không ổn định.

Rõ ràng nếu quá trình tính không ổn định thì khó có hy vọng tính được đại lượng cần tính với sai số nhỏ hơn sai số cho phép. Cho nên trong tính toán nên tránh các quá trình tính không ổn định.

Để kiểm tra tính ổn định của một quá trình tính thường người ta giả sử sai số chỉ xảy ra tại một bước, sau đó các phép tính đều làm đúng không có sai số, nếu cuối cùng sai số tính toán không tăng vô hạn thì xem như quá trình tính là ổn định.

Ví dụ2

Xét quá trình tính

$$y_{i+1} = qy_i \tag{9}$$

y_o và q cho trước.

Giả sử tại bước i xác định nào đó khi tính y_i ta phạm một sai số δ_i (đây không phải là kí hiệu của sai số tương đối như trước đây), nghĩa là thay cho y_i ta chỉ thu được $\tilde{y}_i$. Giả sử:

$$|\tilde{y}_i - y_i| = \delta, \delta > 0 \tag{10}$$

Sau đó thay cho y_{i+1} ta có $\tilde{y}_{i+1}$ với (11)

$$\tilde{y}_{i+1} = q\tilde{y}_i \tag{11}$$

Lấy (11) trừ (9) vế với vế ta được:

$$\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1} = q\tilde{y}_i - qy_i$$

$$\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1} = q(\tilde{y}_i - y_i)$$

Tiếp theo đó ta có:

$$\tilde{y}_{i+2} = q\tilde{y}_{i+1}$$
$$y_{i+2} = qy_{i+1}$$

Bằng phép trừ như trên ta lại có:

$$\tilde{y}_{i+2} - y_{i+2} = q(\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1})$$
$$= q^2(\tilde{y}_i - y_i)$$

Một cách tổng quát ta có (12)

$$\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n} = q^n(\tilde{y}_i - y_i) \tag{12}$$

Như vậy, nếu ở bước thứ i ta mắc một sai số $|\tilde{y}_i - y_i| = \delta$ và sau đó mọi phép tính đều làm đúng thì ở bước i+n ta sẽ mắc sai số:

$$|\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n}| = |q|^n\delta$$

Ta thấy có hai trường hợp cần phân biệt:

1) Trường hợp $|q|\leq 1$ lúc đó $|q|^n \leq 1$ nên sai số

$$\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n} \leq \delta, \forall n$$

Nghĩa là sai số tính toán bị chặn (không tăng vô hạn). Vậy quá trình tính ổn định.

2) Trường hợp $|q|>1$ lúc đó $|q|^n$ tăng khi n tăng và $|q|^n \to \infty$ khi $n \to \infty$, nên sai số

$$|\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n}| \to \infty \; khi \; n \to \infty$$

Vậy quá trình tính không ổn định.

Trong thực tế, mặc dù quá trình tính là vô hạn, người ta cũng chỉ làm một số hữu hạn bước, nhưng vẫn phải đòi hỏi quá trình tính ổn định mới hy vọng với một số hữu hạn bước có thể đạt được mức độ chính xác mong muốn.

4. Nội suy đối với hàm số hai biến số

Các tài liệu phương pháp tính chỉ đề cập bài toán nội suy cho hàm số một biến số. Theo yêu cầu của các nhà kỹ thuật chúng tôi mở rộng nội suy cho hàm số hai biến số theo hai phương pháp sau.

4.1. Nội suy theo phương pháp Lagrange

Bài toán 1

Cho trước hệ lưới điểm ba chiều

Bảng 2. Bảng giá trị của hàm số tại n điểm cho trước.

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n
z	z_1	z_2	...	z_n

Tìm hàm số *z = F(x,y)* thoả mãn bảng 2 dạng đa thức Lagrange.

Hàm *F(x,y)* được thành lập theo hai bước sau

Bước 1

Lập hàm số sau, gọi là đa thức Lagrange cơ sở:

$$I_i(x,y) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} * \frac{(y-y_1)\dots(y-y_{i-1})(y-y_{i+1})\dots(y-y_n)}{(y_i-y_1)\dots(y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})\dots(y_i-y_n)} \quad (13)$$

x_i, y_i $(1 \leq I \leq n)$ cho ở Bảng 2.

Bước 2

Lập hàm số

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} I_i(x,y) z_i \quad (14)$$

Dễ dàng kiểm nghiệm *z = F(x,y)* nghiệm đúng Bảng 2.

Ví dụ 1

Tìm đa thức nội suy Lagrange biết lưới điểm như Bảng 3.

Bảng 3. Lưới điểm đa thức nội suy Lagrange.

TT	x	y	z
1	2	2	0
2	2	0	2
3	2	-2	0
4	0	1	0
5	0	0	1
6	0	-1	0
7	-2	2	0
8	-2	0	2
9	-2	-2	0

Giải như Bảng 4

Bảng 4. Kết quả đa thức nội suy Lagrange.

x	*y*	Tử số của đa thức Lagrange cơ sở	Mẫu số của Đa thức cơ sở	*z*
2	2	x(x+2)(y-1)y (y+1)(y+2)	192	0
2	0	x(x+2)(y-2) (y-1)(y+1)(y+2)	32	2
2	-2	x(x+2)(y-2) (y-1)y(y+1)	192	0
0	1	(x-2)(x+2)(y-2) y(y+1)(y+2)	24	0
0	0	(x-2)(x+2)(y-2) (y-1)(y+1)(y+2)	-16	1
0	-1	(x-2)(x+2)(y-2) $(y-1)y(y+2)$	24	0
-2	2	$(x-2)x(y-1)y$ $(y+1)(y+2)$	192	0
-2	0	$(x-2)x(y-2)$ $(y-1)(y+1)(y+2)$	32	2
-2	-2	$(x-2)x(y-2)$ $(y-1)y(y+1)$	192	0

Vậy hàm số cần tìm:

$$F(x,y) = \frac{x(x+2)(y-2)(y-1)(y+1)(y+2)}{32}.2 + \frac{(x-2)(x+2)(y-2)(y-1)(y+1)(y+2)}{16} + \frac{(x-2)x(y-2)(y-1)(y+1)(y+2)}{32}.2$$

$$F(x,y) = \frac{1}{16}[x(x+2)(y-2)(y-1)(y+1)(y+2) + (x-2)(x+2)(y-2)(y-1)(y+1)(y+2) + (x-2)x(y-2)(y-1)(y+1)(y+2)]$$

4.2. Nội suy bởi hệ hàm độc lập tuyến tính

Bài toán 2

Chọn trước một họ gồm n hàm số, gọi là họ hàm cơ sở

$$f_1(x,y); f_2(x,y); \dots; f_n(x,y).$$

Tìm *z = F(x,y)* thỏa mãn bảng 2 dạng

$$z = a_1 f_1(x,y) + a_2 f_2(x,y) + \dots + a_n f_n(x,y) \quad (15)$$

Trong đó: $a_1; a_2; \dots; a_n$ là các tham số.

Hàm *F(x,y)* được thành lập theo 2 bước sau:

Bước 1

Giải hệ phương trình tuyến tính sau với $a_1; a_2; \dots; a_n$ là ẩn, x_i, y_i, z_i ($1 \le i \le n$) cho ở Bảng 2

$$\begin{cases} a_1 f_1(x_1,y_1) + a_2 f_2(x_1,y_1) + \dots + a_n f_n(x_1,y_1) = z_1 \\ a_1 f_1(x_2,y_2) + a_2 f_2(x_2,y_2) + \dots + a_n f_n(x_2,y_2) = z_2 \\ \dots \\ a_1 f_1(x_n,y_n) + a_2 f_2(x_n,y_n) + \dots + a_n f_n(x_n,y_n) = z_n \end{cases} \quad (16)$$

Bước 2

Lập hàm số *z = F(x,y)* theo công thức (15)

Để giải được hệ cần điều kiện cho hệ hàm cơ sở là ma trận của hệ (16) không suy biến.

Ví dụ 2

Tìm hàm nội suy cho lưới điểm ở Ví dụ 1.

Giải: Do tính đối xứng của hàm lưới, nên ta chỉ cần nội suy cho các điểm lưới trong góc phần tư *I*, và hệ hàm cơ sở là các hàm chẵn theo *x* và *y*.

Trong góc phần tư *I* có 4 điểm lưới. Chọn 4 hàm cơ sở là x^2 ; y^2 ; y^4 ; 1 .

Hàm nội suy có dạng $F(x,y) = ax^2 + by^2 + cy^4 + d$.

Bảng 5. Bảng giá trị

TT	x	y	x^2	y^2	y^4	1	z
1	0	0	0	0	0	1	1
2	0	1	0	1	1	1	0
3	2	2	4	4	16	1	0
4	2	0	4	0	0	1	2

Vậy *a, b, c, d* là nghiệm của hệ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 16 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Giải hệ được nghiệm:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ -0{,}16667 \\ 0{,}166667 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy hàm số cần tìm là

$0.25x^2 - 1{,}16667y^2 + 0{,}166667y^4 + 1$

Ví dụ 3

Giải ví dụ 2 với hệ hàm cơ sở khác.

Giải: Trong góc phần tư I có 4 điểm lưới. Chọn 4 hàm cơ sở chẵn theo biến x và y là $\cos x$; $\cos y$; $\cos 2y$; 1.

Hàm nội suy có dạng $F(x,y) = \mathrm{a}\cos x + b\cos y + c\cos 2y + d$.

Lập bảng giá trị

Bảng 6. Bảng giá trị

x	*y*	*cos(x)*	cos*(y)*	cos*(2y)*	1	*z*
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0.540302	-0.41615	1	0
2	2	-0.41615	-0.41615	-0.65364	1	0
2	0	-0.41615	1	1	1	2

Vậy a, b, c, d là nghiệm của hệ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0{,}540302 & -0{,}41615 & 1 \\ -0{,}41615 & -0{,}41615 & -0{,}65364 & 1 \\ -0{,}41615 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Giải hệ được nghiệm

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}70614 \\ 0{,}946482 \\ 0{,}398902 \\ 0{,}360757 \end{pmatrix}$$

Vậy hàm nội suy cần tìm là

$$F(x,y) = -0{,}70614\, cos\, x + 0{,}946482\, cos\, y + +0{,}398902\, cos\, 2y + 0{,}360757$$

5. Kết luận

Bài báo này trình bày các phương pháp nội suy hàm số hai biến số theo định hướng ứng dụng. Chúng tôi lựa chọn cách lấy ví dụ để chứng minh cho hiệu quả của các phương pháp đã trình bày, phù hợp với tư duy biện chứng của các nhà kỹ thuật.

Chúng tôi chân thành cám ơn các đồng nghiệp đã tin tưởng đặt vấn đề. Tác giả rất vui và rất sẵn sàng tiếp tục trao đổi cùng các bạn ở các lĩnh vực liên quan đến ứng dụng của toán học trong kỹ thuật.

Tài liệu tham khảo

Tô Văn Đinh, 2016, Phương pháp tính. *Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam*.

Võ Trọng Hùng, 1992, Nghiên cứu xây dựng sơ đồ tính toán lớp đất đá bảo vệ đáy moong khai thác chịu tác dụng của nước ngầm cao áp. *Tạp chí Công nghiệp Mỏ 4*. 12-14.

Võ Trọng Hùng. 1993, Nghiên cứu tính toán chiều dày lớp đất đá bảo vệ chịu ảnh hưởng của áp lực nước ngầm trong khai thác lộ thiên. *Tuyển tập các công trình khoa học Hội nghị Cơ học Toàn quốc Lần thứ 5. Tập 5.* 78-83.

ABSTRACT

Some problems about errors and interpolation.

Ngoc Van Nguyen, Dinh Van To

Faculty of General Education, Hanoi University of Minning and Geology, Vietnam

All computations contain errors. In the first part of this article, computational errors are defined and examined through several examples. We highlight the importance of selecting appropriate computation method to ensure numerical stability. The second part of the article discusses data interpolation using Lagrange polynomials. We demonstrate how Lagrange method can be extended for engineering applications that involve more than one independent variable.